Lista zadań #3
Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 3.1

Rozważ populację ryb, których gęstość (ilość osobników na jednostkę powierzchni) wynosi N. Załóżmy także, że szybkość wzrostu populacji R wynosi:

$$R(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

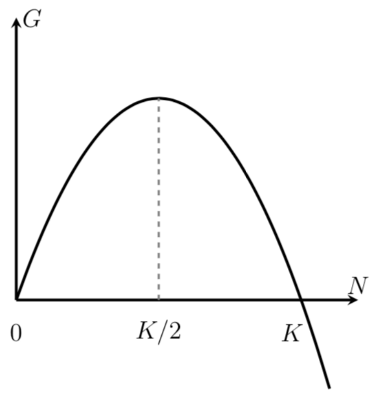
gdzie r i K to stałe wartości dodatnie.

a) Określ dla jakiej populacji ryb ich przyrost jest największy.

Jeżeli wydajność połowów populacji ryb wynosi

$$h(N) = qEN$$

gdzie E to praca rybaków a q to wydajność połowowa.



Dla jakiej gęstości ryb przyrost ryb dokładnie równoważy wydajność połowów? Ta gęstość zwana jest optymalna wydajność połowów (ang. the maximal sustainable yield: MSY).

Zadanie 3.2

Wydajność pozyskania energii, kiedy połączy się wypasanie z czasem dotarcia do pastwiska. Zwierzęta zużywają energię podczas wypasania i podróżowania. W niektórych środowiskach taka strata energii jest znacząca. Uważa się, że aby przetrwać osobnik będzie optymalizował wydajność pozyskania energii netto, zdefiniowane jako:

$$Q(t) = \frac{ilość\ pozyskanej\ energii\ netto}{całkowity\ zużyty\ czas} = \frac{energia\ pozyskana - energia\ stracone}{całkowity\ zużyty\ czas}$$

Załóżmy, że zwierzę spędza p jednostek energii na jednostkę czasu na wszystkie swoje aktywności (wliczając w to wypasanie i podróżowanie. Załóżmy, że energia pozyskana z jednego pastwiska jest wyrażona równaniem:

$$f(t) = \frac{E_{max}t}{k+t}$$

gdzie stałe Emax, k > 0

Wyznacz optymalny czas przebywania na jednym pastwisku, tzn. czas, dla którego Q(t) jest maksymalne.

Zadanie 3.3

Maksymalizacja pozyskanej energii netto.

Załóżmy, że sytuacja wymaga, aby zwierzę maksymalizowało pozyskanie energii netto E(t), zdefiniowanej jako

E(t) = energia pozyskana w wypasie – energia spożytkowana na podróżowanie i wypasanie

Oznacza to, że $E(t) = f(t) - r(t + \tau)$, gdzie r jest szybkość wydatkowania energii na jednostkę czasu a τ to czas podróżowania. Załóżmy, że pozskanie energii przez wypasanie w czasie t na danym pastwisku wynosi:

$$f(t) = \frac{E_{max}t}{k+t}$$

(a) Wyznacz czas t spędzonego na wypasaniu który pozwala zmaksymalizować $E(t)$.

(b) Wskaż warunek w postaci $k <$? , który musi być spełniony aby wystąpił punkt krytyczny.

Zadanie 3.4

Wyznacz pochodne następujących funkcji

(a) $y = f(x) = (x+5)^5$,

(b) $y = f(x) = 4(x^2+5x-1)^8$,

(c) $y = f(x) = (\sqrt{x}+2x)^3$.

Zadanie 3.5

Krzywa wzrostu. Przykładem krzywej wzrostu w biologii populacyjnej jest *krzywa wzrostu Bertalanffiego* (kanadyjski biolog Ludwig von Bertalanffy):

$$N = (a - b2^{-kt})^3$$

gdzie stałe a, b i k są liczbami dodatnimi oraz a > b; N oznacza wielkość populacji a t oznacza czas.

Wyznacz szybkość wzrostu dN/dt populacji.

Zadanie 3.6

Temperatura Ziemi.

Oznaczmy G jaki poziom gazów cieplarnianych na Ziemi. Uwzględnij związek pomiędzy temperaturą Ziemi, albedo a i emisyjność ε jako:

$$T = \left(\frac{(1-a)S}{\varepsilon\sigma}\right)^{1/4}$$

(a) Suppose that *a* is constant, but ε depends on *G*. Assume that *dε/dG* is given. Determine the rate of change of temperature with respect to the level of greenhouse gasses in this case.

(b) Suppose that both *a* and ε depend on *G*. Find *dT /dG* in this more general case.

Zadanie 3.7

Najkrótsza droga z gniazda do źródła pożywienia.

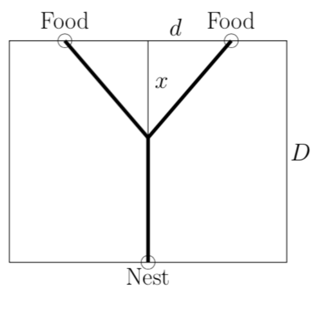
a) Sprawdź czy wartość x = d/$\sqrt{3}$ jest lokalnym minimum dla funkcji L(x) opisną równaniem:

$$L_Y = L(x) = (D - x) + 2\sqrt{d^2 + x^2}$$

b) Pokaż, że najkrótsza droga to $L = D + \sqrt{3}d$

Zadanie 3.8

Najkrótsza ścieżka mrówek.



a) Pokaż, że w najkrótszej drodze kąt pomiędzy odnogami w modelu Y wynosi 120^{o}.

Rozważ długość drogi w modelu V i T. Oznaczmy te odległości jako L_V i L_T. Każda z tych wielkości zleży od odległości d i D.

(a) napisz równanie dla tych odległości,
(b) Załóżmy, że D jest stałe. W jaki sposób L_V i L_T zależy od d? Jak wygląda graficznie zależność $L_v(d)$ i $L_T(d)$.
(c) Określ, czy istnieje wartość d, dla której $L_v(d) = L_T(d)$

Zadanie 3.9

Podzielna uwaga.

Ptak karmi się w środowisku naturalnym dwoma rodzajami nasion, których wartość energetyczna wynosi

- 5 kalorii/nasiono dla typy 1,

- 3 kalorie/nasiono dla typu 2.

Oba typy nasion ukryte są w ściółce leżącej. Jeżeli ptak zwróci uwagę w czas x_1 (ułamek całego czasu) szukając nasiona 1 i x_2 szukając nasiona typu 2 wtedy prawdopodobieństwo znalezienia 100 nasion zadanego typu wynosi:

$$P_1(x_1) = (x_1)^3, P_2(x_2) = (x_2)^5$$

Zakładając, że zwraca całą uwagę na poszukiwanie danego nasiona wtedy

$x_1 + x_2 = 1$, gdzie $0 \leq x_1 \leq 1$ i $0 \leq x_2 \leq 1$

(a) Napisz wyrażenie na całkowita wartość odżywczą, V, nasion kiedy dzieli uwagę na poszukiwanie obu ich rodzajów.

(b) Znajdź punkt przegięcia V(x) I sklasyfikuj go.

(c) Znajdź globalne minima i maksima absolutne i wyjaśnij optymalną strategię dla ptaka tak aby zmaksymalizował zdobywanie wartości odżywczych.

Zadanie 3.10

Wzrost komórki

Opisz wzrost komórki zakładając jej sferyczny kształt. Załóżmy, że promień komórki wzrasta ze stałą prędkością k > 0 na jednostkę czasu.

(a) Z jaką prędkością będzie wzrastała jej objętość V?
(b) Z jaką prędkością będzie wzrastała jej powierzchnia S?
(c) Z jaką prędkością będzie się zmieniał stosunek wielkości S/V? Jak będzie zmieniała się ta wielkość, gdy komórka będzie rosnąć?

Zadanie 3.11

Wzrost kołowej kolonii grzyba. Kolonia grzyba rośnie na płaskiej powierzchni poczynając od pojedynczej spory. Kształt brzegu kolonii jest kołem ze środkiem w początkowej sporze. Przypuśćmy, że promień kolonii rośnie z czasem ze stałą prędkością C na jednostkę czasu.

a) Z jaką prędkością wzrasta powierzchnia kolonii?
b) Biomasa kolonii jest proporcjonalna do powierzchni, którą zajmuje. Niech α jest stałym współczynnikiem. Z jaka prędkością narasta biomasa?

Zadanie 2.12

Wzrost kończyny.

Kończyna zarodka zwiększa się ale jednocześnie zachowuje proporcje wymiarów. Zakładając, że kończyna w przybliżeniu jest cylindrem o promieniu r i długości L w proporcji $L/r = C$, gdzie C jest stałą liczbą. Zauważono, że w początkowej fazie wzrostu promień zwiększa się w przybliżeniu ze stałą prędkością, tzn. $dr/dt = a$. Z jaka prędkością zwiększa się masa kończyny?

Zadanie 3.13

W roku 1905 rolnik w Czechach przez przypadek pozwolił na ucieczkę kilku piżmaków z hodowli. Ich populacja rosła i rozprzestrzeniała się, obejmując coraz większe obszary Europy.

W klasycznej publikacji z ekologii Skellam (1951) pokazał, że pierwiastek z zajętej przez piżmaka powierzchni rośnie ze stałą prędkością k. Określ szybkość zmiany odległości od miejsca uwolnienia piżmaka. Załóż, że powierzchnia jest w kształcie koła.

Zadanie 3.14

Soczewka wypukła. Dana soczewka wypukła ma odległość ogniskową f = 10 cm.

Niech p oznacza odległość pomiędzy przedmiotem I soczewką u q odległość pomiędzy obrazem i soczewką. Te odległości związane są z odległością ogniskową f poprzez równanie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Rozważ obiekt, które oddalony jest od soczewki o 30 cm i przesuwa się od soczewki z prędkością 4 cm/sec. Jak szybko porusza obraz przedmiotu i w którym kierunku?

Zadanie 3.15

Stożkowy kubek. Woda wycieka przez koniec stożkowego papierowego kupka z prędkością 1cm^3/min. Wysokość kubka wynosi 8 cm a jego promień ma 6 cm. Na początku kubek wypełniony jest po brzegi. Wyznacz zmianę wysokości wody w kubku.

Zadanie 3.16

Zróżnicowanie gatunków na danym terenie. Ekologów interesuje związek pomiędzy obszarem o powierzchni (A) i liczbą różnych gatunków (S), które zamieszkują ten obszar. Hopkins (1955) zasugerował zależność:

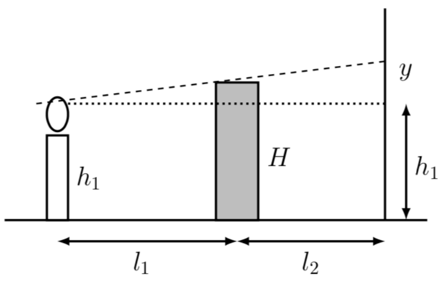
$$S = aln(1 + bA)$$

gdzie a i b to dodanie stałe.

Wyznacz zależność zmiany ilości gatunków od powierzchni. Czy ta funkcja ma maksimum?

Zadanie 3.17

Paląca się świeca. Świeca jest umieszczona w odległości l_1 od cienkiej drewnianej przeszkody o wysokości H. Przeszkoda jest oddalona od ściany na odległość l_2 (Rysunek)



Świeca wypala się powodując, że wysokość płomienia, h_1 maleje z szybkością 3 cm/godz. Wyznacz zmianę wysokości cienia przeszkody na ścianie. Odpowiedź powinna byc wyrażona w stałych l_1 i l_2.

Zadanie 3.18

Mobilne komórki

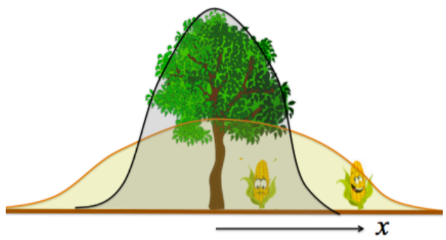
Badając ruchliwość komórek, biologowie badają keratynocyty, komórki epidermalne z łuski ryby. Ta płaska, eliptyczna komórka pełźnie po płaskiej powierzchni, ważny parametr w gojeniu się ran. Kontur 2D komórki może być przybliżony elipsą o równaniu:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

gdzie x i y to wielkości wyrażone w μm.
Kiedy filmowany jest ruch komórki to punkt znajdujący się na „froncie" (górny łuk elipsy) porusza się w kierunku prostopadłym do krawędzi. Określ kierunek poruszania się punktu (x_p, y_p) znajdującego się na krawędzi komórki.

Zadanie 3.19

Agroleśnictwo. Ta dyscyplina integruje uprawę z plantacją drzew co zapewnia wydajność i zachowanie ekosystemu. Drzewa poprawiają przepuszczalność gleby, zatrzymują wodę i stabilną temperaturę.



Rysunek w niewielkiej odległości od drzewa zacienienie S(x) ogranicza wzrost uprawy. Poza tym obszarem korzyści przeważają nad zacienieniem.

Jednocześnie drzewa tworzą zacienienie oraz konkurują o materiały odżywcze. Zarówno korzyści A(x) jak i zacienienie S(x) zależą od odległości od drzewa, cień dominuje w pobliżu drzewa. Załóżmy, że w odległości x od danego gatunku drzewa korzyść B dla uprawy wyraża się zależnością:

$$B(x) = A(x) - S(x)$$

gdzie

$$A(x) = \alpha e^{-x^2/a^2}$$

$$S(x) = \beta e^{-x^2/b^2}$$

$$\alpha, \beta, a, b > 0$$

a) W jakiej odległości od drzewa oba czynniki się zrównoważą?
b) Znajdź optymalną odległość dla uprawy, gdzie wpływ drzewa będzie maksymalny.

Zadanie 3.20

Polymerase Chain reaction (PCR).

PCR było opracowane przez Mullisa w 1983 roku w celu powielania DNA. Technika ta opera się na fakcie, że kazda nić DNA może służyć jako matryca do syntezy komplementarnej nici DNA. Metoda polega na sekwencyjnym podgrzewaniu (oddzielenie, denaturacja, nieci DNA) i chłodzeniu (nowe DNA hybrydyzuje). Mieszanina reakcyjna składa się z oryginalnego DNA, który ma być powielony, enzymów i nukleotydów potrzebnych od syntezy nowego DNA. Każdy cykl podwaja ilość DNA. Pojedyncze doświadczenie PCR składa się z 35 cykli.

Jak bardzo oryginalne DNA zostało powielone? Wyraź tą wartość w potędze 2 i 10.