Lista zadań #5

Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 5.1

Tarcie i prędkość maksymalna. Prędkość spadającego obiektu zmienia się z powodu siły ciążenia, a opór powietrza spowalnia spadający obiekt. Wtedy prędkość v(t) opisane jest równaniem.

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

gdzie g to przyspieszenie ziemskie a k to stała opisująca opór powietrza. Jeżeli przedmiot zrzucono z samolotu:

a) Wyznacz zależność prędkości od czasu.
b) Jaka będzie wartość prędkości, gdy przedmiot będzie spadał z dużej wysokości?

Zadanie 5.2

Poziom alkoholu. Alkohol wnika do krwi ze stałą prędkością k (gm na jednostkę czasu) w czasie przyjęcia. Wątroba stopniowo przekształca alkohol w nietoksyczny metabolizm. Szybkość metabolizowania jest proporcjonalna do stężenia alkoholu we krwi. Stężenie alkoholu we krwi opisuje równanie:

$$\frac{dc}{dt} = k - sc$$

gdzie k i s to dodatnie stałe. Załóżmy, że na początku we krwi nie było alkoholu. Wyznacz stężenie alkoholu we krwi c(t).

Zadanie 5.3

Prawo Newtona dotyczące schładzania mówi, że szybkość zmiany temperatury przedmiotu jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy temperaturą obiektu „T" i temperatury otoczenia „E".

To prowadzi do równania

$$\frac{dT}{dt} = k(E - T)$$

gdzie k > 0 jest stałą materiałową. Zakładamy, że temperatura otoczenia E nie zmienia się.

a) Pokaż, że funkcja

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$$

spełnia powyższe równanie.

b) Czas śmierci ofiary przestępstwa można ocenić na podstawie temperatury ciała, kiedy ciało znaleziono odpowiednio wcześnie. Załóżmy, że temperatura otoczenia wynosiło $E = 20^{\circ}$ C, a temperaturze zwłok w czasie ich znalezienia wynosiła $T = 30^{\circ}$ C, a kolejny pomiar po godzinie pokazał, że wynosi $T = 25^{\circ}$ C. Wyznacz przybliżony czas przestępstwa.

Zadanie 5.4

Kubek z kawą

Temperatura kubka kawy po wypełnieniu wynosiła 100 ^{0}C. Pięć minut później (t = 5) temperatura wynosiła 50 ^{0}C. Jeżeli temperatura otocznia wynosi A = 20 ^{0}C, określ po jakim czasie temperatura spadnie do 30 ^{0}C.

Zadanie 5.5

time (min)	**Temp**
0.0	190.0
0.5	185.5
1.0	182.0
1.5	179.2
2.0	176.0
2.5	172.9
3.0	169.5
3.5	167.0
4.0	164.6
4.5	162.2
5.0	159.8

W tabeli pokazano schładzanie mleka w trakcie produkcji jogurtu. Zgodnie z prawem Newtona dotyczącego schładzania, te dane opisywane są równaniem:

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$$

$T(t)$ to temperatura mleka (w stopniach Fahrenheita) gdzie czas jest w in min, E to temperatura otoczenia a k to stała.

a) Przepisz tą funkcję w wielkościach $Y(t)=\ln(T(t)- E)$, i pokaż, że $Y(t)$ jest liniową funkcją t.
b) Jak można wyznaczyć stałą k?
c) Wyznacz stałą k dla danych z tabeli, jeżeli $E = 20^{\circ}$F.

Zadanie 5.6

Przyrost masy niemowlaka.

W czasie pierwszego roku życia, waga niemowlaka opisana jest równaniem

$$y(t) = \sqrt{3t + 64}$$

a) Pokaż, że zależność ta spełnia równanie:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}$$

gdzie k to stała.

b) Jaka jest wartość stałej k?

Załóżmy, że wzrost człowieka opisuje powyższe równanie różniczkowe. Określ w jednym zdaniu jedną cechę tego równania, które czyni go dobrym modelem. Określ jedną cechę, która czyni je niewłaściwym.

Zadanie 5.7

Połowy w jeziorze. Fish Unlimited jest firmą zarządzającą stanem zarybienia w prywatnym jeziorze. Firma zarybia jezioro ze stałą wydajnością. N rybaków może łowić każdego dnia w jeziorze. Określono, że populacja ryb w jeziorze, F(t) spełnia następujące równanie:

$$\frac{dF}{dt} = I - \alpha NF$$

a) Jaka jest wydajność zarybiania? Podaj wielkość i jednostki.
b) Jaka jest średnia wielkość połowów na jednego rybaka? Podaj liczbę i jednostkę
c) Jakie było założenie dotyczące płodności i śmiertelności ryb?
d) Jeżeli wydajność łowiska i liczba połowów są stałe, jaka jest wielkość populacji ryb w warunkach ustalonych?
e) W pewnej chwili t=0 firma wstrzymała zarybianie. Napisz zmodyfikowaną postać równania, która uwzględnia ten fakt i przy założeniu, że połowy się nie zmieniły. Po jakim czasie populacja ryb spadnie do poziomu 25% jej początkowej wartości?
f) Kiedy populacja ryb spadnie do poziomu F_{low}, wstrzymano połowy I zaczęto zarybianie z tą samą intensywnością (α = 0.) Napisz odpowiednią wersję równania. Jak długo będzie trwało aby populacja ryb się podwoiła?

Zadanie 5.8

Hodowla komórkowa. Komórki w hodowli komórkowej produkując cytokiny (substancja, która kontroluje wzrost innych komórek) ze stałą prędkością 10 nanoMoli/godzinę (nM/h). Czas półtrwania substancji to 20 godzin. Napisz równanie, które opisze zależność stężenia substancji w czasie. Rozwiąż to równanie zakładając, że w *t* = 0 nie ma cytokin.

Zadanie 5.9

Roztwór glukozy w zbiorniku.

Pojemnik o pojemności 1 L na początku jest pełen czystej wody. Stężony roztwór glukozy, 0,25g/cm^3 jest wpompowywany do zbiornika z prędkością 10 cm^3/min a mieszanina (dobrze mieszana) jest wypompowywana z tą samą prędkością. Ile glukozy jest w zbiorniku po 30 min i po długim czasie?

Zadanie 5.10

Zanieczyszczenie jeziora.

Jezioro o objętości C m^3 zawiera $Q(t)$ kilogramów zanieczyszczenia w czasie t. Zanieczyszczenie jest jednorodne. Woda zwierające zanieczyszczenie o stężeniu k kg/m^3 wpływa do jeziora z prędkością r m^3/min i dobrze wymieszany roztwór wypływa z jeziora z tą sama prędkością.

a) Napisz równanie opisujące zmianę stężenia zanieczyszczenia w jeziorze.
b) Określ jakie będzie stężenia zanieczyszczenia w jeziorze po długim czasie.
c) Jeżeli k = 0 znajdź czas T, po którym stężenie osiągnie połowę początkowej wartości.

Zadanie 5.11

Roztwór cukru. Cukier rozpuszcza się w wodzie z prędkością proporcjonalną do ilości cukru w formie stałej. Niech Q(t) oznacza ilości nierozpuszczonego cukru w czasie t. Ilość początkowa cukry to 100 kg i po 4 godzinach masa nierozpuszczona wynosi 70 kg.

a) Napisz równanie opisujące Q(t) i rozwiąż je.
b) Ile czasu zajmie rozpuszczenie 50 kg?

Zadanie 5.12

Cieknący zbiornik z wodą.

Cylindryczny zbiornik o powierzchni przekroju A ma niewielki otwór, przez który wycieka woda. Wysokość słupa cieczy w zbiorniku y(t) w czasie t jest opisana równaniem:

$$y(t) = \left(\sqrt{y_0 - \frac{kt}{2A}}\right)^2$$

gdzie k i y_0 to stałe.

a) Pokaż, że wysokość słupa cieczy $y(t)$ spełnia równanie:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{A}\sqrt{y}$$

b) Jaka jest początkowa wysokość słupa cieczy t = 0?
c) Po jakim czasie zbiornik się opróżni?
d) Z jaka prędkością zmienia się objętość wody w zbiorniku, kiedy t = 0?

Zadanie 5.13

Sześcienny kryształ.

Kryształ w kształcie sześcianu rośnie w medium. Długość boku to x a jego objętość to V. Szybkość zmiany objętości kryształu opisuje równanie:

$$\frac{dV}{dt} = kx^2(V_0 - V)$$

gdzie k i V_0 to stałe dodatnie.

a) Napisz to równanie dla dx/dt.
b) Załóżmy, że kryształ rośnie z niewielkiego zarodka. Pokaż, że szybkość wzrostu ciągle maleje.
c) Co się stanie z wymiarem kryształu po bardzo długim czasie?
d) Jaki jest rozmiar kryształu, gdy wzrasta z połową początkowej prędkości?

Zadanie 5.14

Prawo mas. Prawo mas zakłada, że szybkość reakcji pomiędzy dwiema substancjami (A i B) jest proporcjonalna do iloczynu ich stężeń, $k \cdot a \cdot b$.

Wyjaśnij, dlaczego suma stężeń $k \cdot (a + b)$ nie będzie rozsądnym założeniem dotyczącego szybkości reakcji.

Zadanie 5.15

Reakcja biochemiczna, w której substancja S jest zarówno produkowana jak i zużywana. Stężenie c(t) substancji S podczas reakcji opisuje równanie:

$$\frac{dc}{dt} = K_{max}\frac{c}{k + c} - rc$$

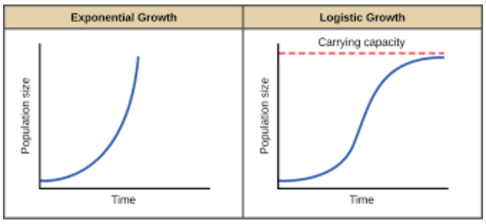
gdzie K_{max}, k, r to dodatnie stałe. Pierwszy człon równania jest, zależna od stężenia produkcja a drugi człon opisuje rozpad substancji.

a) Jaka jest maksymalna szybkość produkcji substancji? Przy jakim stężeniu wydajność produkcji wynosi 50% maksymalnej wartości?
b) Jeżeli produkcja będzie wstrzymana substancja będzie się rozpadać. Ile czasu potrzeba aby stężenie spadło o 50%?
c) Przy jaki stężeniu produkcja zrównoważy rozpad?

Zadanie 5.16

Logistyczny wzrost z proporcjonalnymi zbiorami. Gęstość populacji ryb $N(t)$ rośnie z prędkością $g(N)$, uwzględniając połowy możemy napisać:

$$\frac{dN}{dt} = g(N) - h(N)$$



Załóżmy, że szybkość wzrostu jest logistyczny, więc

$$g(N) = rN\frac{K - N}{K}$$

gdzie r, K > 0. Załóżmy, że wydajność połowów jest proporcjonalna do wielkości populacji więc:

$$h(N) = qEN$$

gdzie E to praca rybaków i q wydajność łowienia ryb to stałe. Przeanalizuj równanie. Jakie warunki muszą być spełnione, aby łowienie było możliwe przez długi czas.

Zadanie 5.17

Wzrost logistyczny ze stałym połowem. Rozważ populację ryb jak w zadaniu poprzednim, ale tym razem załóż, że wielkość połowów jest stała i niezależna od wielkości populacji ryb, wtedy:

$$h(N) = H$$

gdzie H to ilość wyłowionych ryb. Przeanalizuj ten model i porównaj z poprzednim.

Zadanie 5.18

Przeskalowanie czasu w równaniu logistycznym

Rozważ przeskalowanie równania logistycznego.

$$g(N) = rN\frac{K - N}{K}$$

r jest w jednostkach 1/czas, więc 1/r jest w jednostkach czas. Przeskaluj równanie przez zdefiniowanie t=s/r. Wtedy s jest wielkością bezwymiarową. Wyznacz dN/ds.

Zadanie 5.19

Strategia szczepień.

Kiedy osoba jest zaszczepiona to nie należy juz do populacji zagrożonej co efektywnie zmniejsza wielkość populacji, która może przekazywać chorobę. Dla przykładu, ieżeli ułamek φ populacji jest zaszczepiony, wtedy tylko pozostał aczęść populacji $(1 - \varphi)N$ może buć zagroązona lub zainfelowana wtedy $S(t)+I(t) = (1-\varphi)N$. Kiedy ospa prawdziwa była chorobą endemiczną to miała podstawową liczbę reprodukcyjną równą $R_0 = 7$. Jaki ułamek populacji powinien być zaszczepiony aby wyeliminować tą chorobę?

Zadanie 5.20

13.18. "Social media." Sally Sweetstone wprowadziła nową aplikację zwaną "HeadSpace", która natychmiast kojarzy pary zgodnie z ich zmieniającymi się upodobaniami I stylami. Użytkownicy dowiadują się o aplikacji od siebie nawzajem w konsekwencji zakładając swoje konta. Konta wygasa losowo z czasem połowicznym 1 miesiąca. Załóż, że $y_1(t)$ to liczba osób, które nie są zapisani a $y_2(t)$ to osoby zapisane w chwili t. Zaproponowana następujący model opisujący populację osób zapisanych:

$$\frac{dy_1}{dt} = by_2 - ay_1y_2$$

$$\frac{y_2}{dt} = ay_1y_2 - by_2$$

a) Objaśnij wielkości w równaniu. Jaka jest wartość stałej b?
b) Pokaż, że całkowita populacja $P=y_1(t)+y_2(t)$ jest stała. (prawo zachowania)
c) Wykorzystaj prawo zachowania, aby wyeliminować y_1. Wtedy przeanalizuj równanie z punktu widzenia y_2.
d) Wykorzystaj model, aby ocenić, czy aplikacja będzie sukcesem czy porażką.