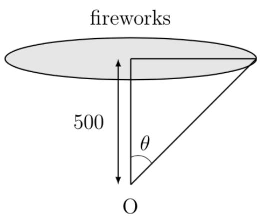
Lista zadań #7
Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 7.1

Sztuczne ognie. Osoba zlokalizowana bezpośrednio pod letnimi pokazami sztucznych ogni patrzę bezpośrednio do góry. Pojedynczy wybuch pojawił się dokładnie nad głową obserwatora na wysokości 500m jak pokazano na rysunku. Szybkość zmiany kąta obserwacji rozbłysku wynosi 100 m/sec.



Zakładając, że wybuch ma kształt dysku równoległego do powierzchni ziemi ze środkiem bezpośrednio nad obserwatorem, pokaż jaka jest szybkość zmiany kata widzenia obserwatora w momencie, kiedy promień dysku wynosi r = 100 metrów?

Zadanie 7.2

Powiązane zmiany. Dwa sferyczne balony są połączone tak, że kiedy jeden jest napełniany to drugi jest opróżniany. Całkowita objętość gazu pozostaje stała. Kiedy pierwszy balon ma promień 10 cm I jego promień rośnie z prędkością 3 cm/sec, drugi balon ma promień 20cm. Jaka jest szybkość zmiany promienia drugiego balonu?

Zadanie 7.3

Prędkość cząsteczki. Cząsteczka porusza wzdłuż osi x tak, że odległość od początku układu współrzędnych w funkcji czasu t jest opisana równaniem:

$$x(t) = (t + 2)^3 + \lambda t$$

gdzie λ to stała.

a) wyznacz prędkość $v(t)$ I przyspieszenie $a(t)$

b) Określ najmniejszą prędkość cząsteczki.

Zadanie 7.4

Ruch cząsteczek opisany jest równaniem $y(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

gdzie $y(t)$ to zmiana położenia (w metrach) t to czas (w sekundach) oraz $0 \leq t \leq$ 4 sec.

a) W tym przedziale czasu, kiedy cząsteczka jest najbardziej oddalona od położenia początkowego?
b) W tym przedziale czasu jaka jest największa prędkość cząsteczki?
c) Jaka jest całkowita odległość (licząc zarówno ruch do przodu jak i do tyłu) jaką przebyła cząsteczka w tym przedziale czasu?

Zadanie 7.5

Spadający przedmiot. Rozważ przedmiot wyrzucony do góry z prędkością $v_0 > 0$ i z wysokości początkowej $h_0 > 0$. Wtedy wysokość obiektu w funkcji czasu t opisuje równanie:

$$y = f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

Wyznacz punkt przegięcia funkcji f(t) i używając pierwszej i drugiej pochodnej pokaż, że jest to lokalne maksimum.

Zadanie 7.6

Przybliżenie liniowe. Znajdź liniowe przybliżenie funkcji $y = x^2$ w punkcie $x =$ 2. Wykorzystaj uzyskany wynik do estymacji wartości $(2.0001)^2$.

Zadanie 7.7

Wirus HIV. Początkowo, pacjent ma 1000 kopii wirusa. Ile czasu zajmie osiągnięcie poziomu wirusa, kiedy jest on wykrywalny? Załóż, że ilość wirusów (wirulencja) y rośnie zgodnie z równaniem:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}05y$$

kiedy t to czas w dniach, a niemniejsza wykrywalna wirulencja to 350 000 kopii. Wyraź odpowiedź w skali log.

Zadanie 7.8

Generacje ryb. W Rzece Rybnej ilość łososia (w tysiącach), x, w danym roku jest powiązana z populacją łososia (w tysiącach), y, w roku następnym poprzez funkcję:

$$y = Axe^{-bx}$$

gdzie stałe $A, b > 0$.

- Dla jakiej liczby łososia nie będzie zmiany pomiędzy latami?

- Wyznacz populację łososia, która spowoduje największą liczbę ryby w roku następnym.

Zadanie 7.9

Punkty krytyczne

a) Wyznacz punktu krytyczne dla funkcji $y = e^x(1-\ln(x))$ w przedziale $0.1 \le x \le 2$ i sklasyfikuj je
b) Funkcja $y = \ln(x) - e^x$ ma punkt krytyczny w przedziale $0.1 \le x \le 2$. Nie można rozwiązać funkcji dla tej wartości x w tym punkcie, ale można wyznaczyć jakiego typu jest to punkt krytyczny. Określ czy punkt ten to lokalne minimum, maksimum czy punkt przegięcia.

Zadanie 7.10

Potencjał Lennarda-Jonesa, $V(x)$ to energia potencjalna dwóch nienaładowanych molekuł w funkcji odległości x, i jest opisana zależnością:

$$V(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

gdzie a, $b > 0$. Molekuły rozlokowują się tak, aby ich energia potencjalna osiągnęła minimum. Wyznacz lokalny punkt krytyczny dla tego potencjału i wykaż za pomocą drugiej pochodnej, że jest to minimum lokalne.

Zadanie 7.11

Prostokąt wpisany w okrąg. Wyznacz wymiary największego prostokąta (z punktu widzenia powierzchni) wpisanego w okrąg o promieniu r.

Zadanie 7.12

Prędkość kaszlnięcia. Osoba kaszle, kiedy obcy obiekt znajduje się w przewodzie oddechowym. Szybkość kaszlnięcia zależy od wielkość tego obiektu. Załóżmy, że osoba ma przewód oddechowy o promieniu 20 mm. Jeżeli obcy obiekt ma promień r, w milimetrach, wtedy prędkość kaszlnięcia V, potrzebna, aby usunąć obiekt z przewodu oddechowego jest opisana równaniem:

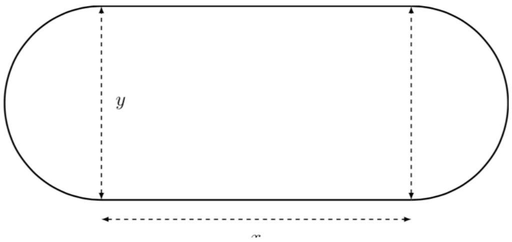
$$V(r) = k(20r^2 - r^3)$$

$$0 \le r \le 20$$

gdzie k to dodatnia stała. Dla jakiej wielkości obiektu aby go usunąć prędkość kaszlnięcia jest największa.

Zadanie 7.13

To wyścigowy. Rysunek pokazuje tor wyścigowy o długości 1 km z kołowymi zakrętami. Wyznacz wartości x i y, dla których prostokąt ma maksymalna powierzchnię.



Zadanie 7.14

Kształt liścia.

Załóżmy, że liść ma w przybliżeniu kształt rombu o przekątnych x i y. Jeżeli liść rośnie w taki sposób, że wymiar x wzrasta z prędkością 2 cm/rok a wymiar y z prędkością 1 cm/rok to w jakim tempie rośnie powierzchnia liścia?

Zadanie 7.15

Koszt usuwania zanieczyszczeń. Podnioty gospodarze odkryły, że usuwanie zanieczyszczeń wzrasta wraz z ułamkiem koniecznym do usunięcia. Załóżmy, że C to koszt usunięcia p% zanieczyszczeń w złotych powstałego w wyniku wycieku. Zależność tą opisuje równanie:

$$C(p) = \frac{48000}{100 - p}$$

a) wyznacz: C(0), C(20), C(80) i C(90)
b) wyznacz domenę dla p
c) naszkicuj wykres funkcji
d) Czy podmiot gospodarczy może usunąć zanieczyszczenie w 100%?

Zadanie 7.16

Siła nabywcza. Od 1970 siła nabywcza dolara, mierzona cenami dla konsumentów, może być opisana równaniem:

$$P(x) = \frac{2{,}632}{1 + 0{,}11x}$$

gdzie x to liczba lat od roku 1970 (US Burou of Econoic Analysis)

a) Wyznacz P(10), P(20) i P(40)
b) Kiedy siła nabywcza wynosiła 50 % wartości z roku 1970?

c) Wyznacz $\lim_{x \to \infty} P(x)$

Zadanie 7.17

Lek w krwioobiegu.

Po zastrzyku leku A, jego stężenie we krwi, maleje z czasem t (w godzinach). Załóżmy, że stężenie leku we krwi opisane jest równaniem:

$$A(t) = \frac{A_0}{t^2 + 1}$$

gdzie A_0 jest dawka leku.

a) Wyznacz A(0), A(2), A(7) i A(10)
b) Wyznacz maksymalne stężenie leku we krwi w przedziale czasu t = [0,∝).
c) Naszkicuj wykres funkcji
d) Zgodnie z wykresem czy lek będzie kiedykolwiek usunięty z krwioobiegu?

Zadanie 7.18

Maksymalizacja zysku

Całkowity koszt oraz całkowity przychód z wyprodukowania x produktów opisywane są równaniami, odpowiednio

$$C(x) = 5000 + 600x$$

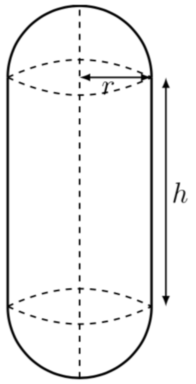
$$R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1000x$$

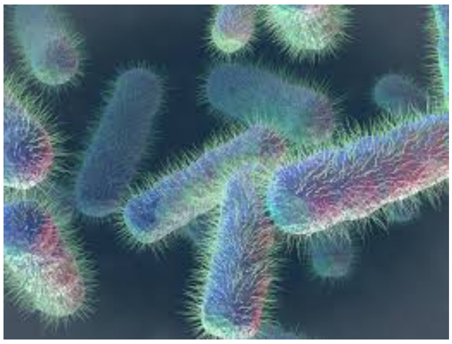
gdzie $0 \leq x \leq 600$

a) Wyznacz funkcje zysku.
b) Wyznacz ilość produktu x gdzie zysk będzie maksymalny
c) Średni zysk wyraża się zależnością: A(x) = P(x)/x. Wyznacz A(x).
d) Wyznacz ilość produktów, dla których średni zysk jest maksymalny.

Zadanie 7.19

Kształt E. coli. Komórka bakterii E. coli ma kształt cylindra z dwoma sferycznymi zakończeniami jak pokazano na rysunku. Wysokość i promień cylindra oznaczamy jako h i r odpowiednio.





1) Wyznacz wartość r i h, dla których objętość komórki jest największa, jeżeli jej powierzchnia jest stała.
2) Typowa komórka E. coli ma wymiary h = 1μm i r = 0.5μm. Porównaj z wynikiem z 1).

Zadanie 7.20

Zmieniający się kształt komórki.

Jeżeli komórka w kształcie E. coli rośnie w taki sposób, że jej wysokość rośnie dwa razy szybciej niż promień, a promień rośnie w tempie 1 μm na dzień, to w jakim tempie zmienia się objętość komórki? Napisz odpowiedź wyrażoną w h i r.

Zadanie 7.21

Minima i Maksima.

- Rozważ wielomian $y = 4x^5 - 15x^4$. Wyznacz dla tej funkcji wszystkie lokalne punkty krytyczne.
- Wyznacz globalne minima i maksima dla tej funkcji w przedziale $[-1,1]$.

Zadanie 7.22

Wzrost winorośli. Winorośl rośnie wokół drzewa w kształcie helisy jak pokazano na rysunku. Jeżeli długość winorośl rośnie ze stałą prędkością α cm/dzień, z jaka prędkością wzrasta wysokość czubka winorośli? Załóż, że promień drzewa wynosi r a skok helisy wynosi p.