Lista zadań #2
Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 2.1

Rozważ komórkę w kształcie cylindra (długości L i promień r). Załóż, że komórka absorbuje pożywienie przez powierzchnię z wydajnością k_1S *i konsumuje je z wydajnością* k_2V*, gdzie* S,V *to powierzchnia i objętość.*

Załóżmy, że $k_1 = 12\mu M\ \mu m^{-2} min^{-1}$ and $k_2 = 2\mu M\ \mu m^{-3}\ min^{-1}$.

(a) Określ promień komórki r, dla którego konsumpcja będzie zrównoważona przez absorbcję.

(b) Co się stanie, gdy promień wzrośnie lub zmaleje?

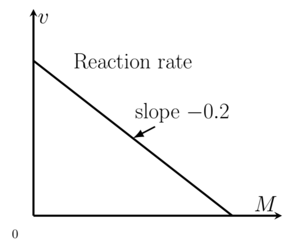
(c) W jaki sposób długość komórki (L) wpłynie na tą równowagę.

Zadanie 2.2

Szybkość reakcji chemicznej.

Rozważmy reakcję chemiczną, która się nie wysyca a związek pomiędzy szybkością reakcji i stężeniem reagenta jest zależnością liniową. Związek jest dodany do mieszaniny i jest zużywany w czasie reakcji. Szybkość zmiany reagenta (szybkość reakcji) v M/sec jest opisana zależnością:

$$v = a - bc$$



gdzie *c to stężenie reagenta* (w M) and *a*, *b to stałe*.

(a) Jakie jednostki powinny mieć stałe a i b.

(b) Wykorzystaj dane z wykresu, aby znaleźć wielkości a i b (punkt przecięcia z osią c to 0.01M)

(c) jaka jest szybkość reakcji, gdy c = 0.005 M?

Zadanie 2.3

Kinetyka Michaelisa-Mentena.

Rozważ kinetykę Michaelis-Mentena, gdzie szybkość reakcji enzymatycznej jest opisana równaniem:

$$v = \frac{Kx}{k_n + x}$$

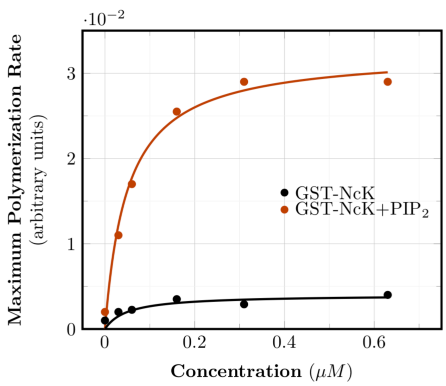
(a) Jaka jest wartość v gdy x dąży do nieskończoności.

(b) Wyznacz szybkość reakcji, gdy $x = k_n$.

Zadanie 2.4

Reakcja polimeryzacji

Szybkość polimeryzacji pokazana jest na rysunku 1.6. Szybkość reakcji jest wykreślona jako funkcja stężenia substratu (aktyny) dane z [Rohatgi et al., 2001]. Dane doświadczalne to punkt linia ciągła to krzywa Michaelis-Menten dopasowana do puntów doświadczalnych. Wykorzystaj wykres do oszacowania wartości K i k_n.



Szybkość polimeryzacji

Zadanie 2.5

Funkcja Hilla

Funkcja Hilla czasami jest wykorzystywana do opisania włącznika biochemicznego, tzn. szybkiego przejścia pomiędzy stanami. Rozważ dwie funkcje Hilla

$$y_1 = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$y_2 = \frac{x^5}{1 + x^5}$$

(a) Gdzie te funkcje się przecinają?

(b) Jakie są asymptoty tych funkcji?

(c) Która z funkcji wzrasta szybciej dla małych stężeń?

(d) Która funkcja jest bardziej stroma i dlaczego?

Zadanie 2.6

Transformacja funkcji Hilla do funkcji liniowej

Funkcja Hilla jest funkcją nieliniową, ale gdy przedefiniujemy zmienne, to można ją przetransformować do zależności liniowej. Proces podobny do transformacji kinetyki Michaelis-Mentena do wykresu Lineweaver-Burk.

(a) Określ, jak należy zdefiniować wielkości *X* i *Y* (w zależności od zmiennych wyjściowych *x* i *y*) tak aby funkcja Hilla:

$$y = \frac{Ax^3}{a^3 + x^3}$$

była przekształcona na zależność liniową pomiędzy *X* i *Y*.

(b) Wskaż ja jest związek nachylenia i punktu przecięcia fuksji liniowej z parametrami funkcji Hilla (A i a).

Zadanie 2.7

Wiadomo, że zależność szybkości reakcji v od stężenia reagenta opisana jest równaniem:

$$v = \frac{Kc^2}{a^2 + c^2}$$

gdzie k i a to stałe. Kiedy wykreślimy zależność wartości wielkości 1/v (na osi OY) od $1/c^2$ (na osi OX) to punkty najlepiej opisane są linią prostą z punktem przecięcia z osią OY równym 2 i nachyleniem równym 8. Wykorzystaj te dane do wyznaczenia wartości K i a.

Zadanie 2.8

Kinetyka enzymatyczna Michaelis-Mentena.

Szybkość reakcji enzymatycznej zgodnie z założeniami kinetyki Michaeisa-Meintena wynosi:

$$y = \frac{Kc}{k_n + c}$$

gdzie c to stężenie substancji a v to szybkość reakcji. Rozważ następujące wartości:

Stężenie substratu	nM	c	5	10	20	40	50	100
Szybkość reakcji	nM/min	v	0,068	0,126	0,218	0,345	0,39	0,529

a) przekształć te dane na zależność Lineweavera-Burka (liniową)
b) określ nachylenie i punk przecięcia z wyznaczonej zależności liniowej
c) oszacuj wartości K i k_n.

Zadanie 2.9

Położenie ryb w ławicy zgodnie z Brederem [Breder, 1951]. Dwie ryby w ławicy preferują być oddalone od siebie na zadaną odległość. Breder sugerował, że ryby znajdujące się w odległości x przyciągane są z siłą $F_A(x) = A/x^a$ i odpychają się z siłą $F_R(x) = R/x^r$, aby nie były za blisko. Breder wyznaczył preferowaną odległość (zwana odległością indywidualną) poprzez wyznaczenie wartości x, dla której siła odpychania i przyciągania równoważą się. Wyznacz odległość indywidulaną wyrażoną w wartościach A, R, a i r (wszystkie wielkości mają wartość dodatnią).

Zadanie 2.10

Kinetyki Michaelis-Menten i Hilla.

Wyznacz pochodną następujących funkcji:

(a) Kinetyki Michaelis Mentens,

$$v = \frac{Kx}{k_n + x}$$

(b) Funkcji Hilla

$$y = \frac{Ax^n}{a^n + x^n}$$

Zadanie 2.11

Stosunek gatunków. Odkryto, że w jeziorze szybkość zmiany populacji dla dwóch gatunków $(N_1(t), N_2(t))$ jest proporcjonalna do wielkości danej populacji. Czyli, że

$$\frac{dN_1}{dt} = k_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = k_2 N_2$$

gdzie k_1 i k_2 to stałe. Znajdź szybkość zmiany stosunku wielkości populacji (N_1/N_2) w czasie $d(N_1/N_2)/dt$. Odpowiedź powinna być wyrażona wielkościami k_1,k_2 i stosunkiem N_1/N_2.

Gatunkiem inwazyjnym jest ten, który namnaża się szybciej od gatunku rodzimego co powoduje, kolonizację i wyparcie w lokalnym ekosystemie

Załóżmy, że początkowo, stosunek gatunku rodzimego N_1 do gatunku kolonizującego N_2 jest bardzo duży. W jakich warunkach (z punktu widzenia k_1,k_2) stosunek ten zmniejszy się w czasie, tzn. Gatunek kolonizujący wyprze gatunek rodzimy?

Zadanie 2.12

Ruch cząsteczki

Prędkość cząsteczki jest znana i zależy od czsu zgodnie z równaniem:

$$v(t) = A - Bt^2$$

stałe $A, B > 0$

(a) wyznacz przyspieszenie cząsteczki $a(t)$.

(b) Zakładając, że położenie początkowe cząsteczki $y(0) = 0$ wyznacz położenie cząsteczki w funkcji czasu.

(c) Po jakim czasie cząsteczka powróci do punktu wyjścia?

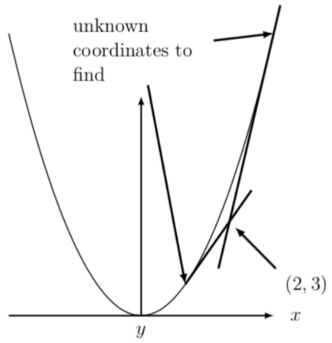
(d) Kiedy cząsteczka jest najdalej od punktu wyjścia?

(e) Jaka jest największa wartość prędkości cząsteczki?

Zadanie 2.13

Przecinające się styczne

Parabola $y = x^2$ ma dwie styczne, które przecinają sie w punkcie (2, 3) (Rysunek). Wyznacz współrzędne punktów na paraboli, dla których są to styczne. Uwaga: punkt (2, 3) nie leży na paraboli.



Zadanie 2.14

Kinetyka reakcji. Chemicy często opisują szybkość wysycających się reakcji używając równania Michaelis-Mentena (R_m) lub kinetyki sigmoidalnej (R_s).

$$R_m(c) = \frac{Kc}{k_n + c}$$

$$R_s(c) = \frac{Kc^2}{{k_n}^2 + c^2}$$

gdzie c oznacza stężenie reagentu, stałe $K > 0$, $k_n > 0$. $R(c)$ jest prędkością reakcji w funkcji stężenia reagent.

(a) Naszkicuj obie krzywe. Aby to zrobić przeanalizuj zachowanie się krzywych dla $c = 0$, dla małych wartości c i dla dużych wartości c.
(b) Jaka jest maksymalna szybkość reakcji dla każdej z funkcji R_m, R_s ? *Uwaga: wyrazić odpowiedź* stałych K, k_n.

(b) Pokaż, że wartość $c = k_n$ jest równa połowie maksymalnej szybkości reakcji.
For the questions below, you may assume that $K = 1$ and $k_n = 1$.

(c) Pokaż, że kinetyka sigmoidalna ma punkt przegięcia a kinetyka Michaelis-Mentena nie.

Zadanie 2.15

Znajdź liczby. Suma dwóch liczb dodatnich wynosi 20 znajdź liczby:

(a) ich iloczyn ma wartość maksymalną,

(b) suma ich kwadratów jest minimalna,

(c) iloczyn kwadratu jednej i trzeciej potęgi drugiej ma wartość maksymalną.

Zadanie 2.16

Wyznacz najmniejszą odległość od punktu o współrzędnych $(a, 0)$ do paraboli o równaniu $y^2 = 8x$.

Zadanie 2.17

Dlaczego lód pływa po wodzie?

Woda jest jedyną powszechnie występującą cieczą, której gęstość jest największa dla temperatury powyżej temperatury topnienia. Zgodnie z danymi literaturowymi masa wody, która znajduje się w jenym litrze w temperaturze 0˚C zajmuje objętość (w litrach) opisaną równaniem:

$$V = -aT^3 + bT^2 - cT + 1$$

Temperatura jest ^oC i kiedy 0 ˚C < T < 30˚C i kiedy stałe wynoszą:

$$a = 6{,}79 \times 10^{-8},\ b = 8{,}51 \times 10^{-6},\ c = 6{,}42 \times 10^{-5}.$$

Znajdź temperaturze pomiędzy 0˚C i 30˚C, dla której gęstość wody jest największa.

Zadanie 2.18

Reakcja $R(x)$ pacjenta na lek w dawce x zależy od rodzaju leku. Określono, że dla pewnego leku związek ten wygląda w następujący sposób:

$$R(x) = Ax^2(B - x)$$

gdzie A i B to dodatnie stałe. Wrażliwość pacjenta na lek jest zdefiniowana jako $R'(x)$.

(a) dja jakiej dawki leku reakcja jest maksymalna i jaka jest wartość tej reakcji?

(b) Dla jakiej wartości x wrażliwość na lek jest największa?

Zadanie 2.19

Optymalna strategia reprodukcji. Zwierzęta, które mają wiele zdrowych potomków, które przetrwają mają przewagę ewolucyjną na innymi gatunkami. Jednakże, zbyt wiele potomstwa jest zbyt dużym obciążeniem dla rodziców. Jeżeli to powoduje, że rodzice umierają przewaga ewolucyjna jest stracona. Dodatkowo, konkurencja pomiędzy potomstwem o pożywienie zmniejsza liczbę przeżywających osobników.

Załóżmy, że korzyść ewolucyjna A dla rodziców mających miot o rozmiarze x wynosi:

$$A(x) - \ ax - bx^2$$

Załóżmy także, że koszt C dla rodziców mających miot o wielkości x jest:

$$C(x) = mx + e$$

Wypadkowa korzyść z reprodukcji G jest zdefiniowana jako:

$$G = A - C$$

a) dla jak dużego miotu korzyść (A) jest największa?
b) Jaka wielkość miotu jest najmniej korzystna dla rodziców?
c) Dla jakiego miotu korzyść reprodukcyjna jest największa?

Zadanie 2.20

Ekologia behawioralna. Zwierzęta stadne żyjące w grupach spędzają mniej czasu na obserwacje drapieżników niż zwierzęta żyjące pojedynczo. Jednakże marnują więcej czasu na walkę z innymi członkami grupy o pożywienie. Istnieje optymalny rozmiar grupy, w której zwierzęta nie marnują czasu.

Załóżmy, że dla rozmiar grupy wynoszącej x ułamek czasu spędzony na obserwację drapieżników wynosi

$$S(x) = A\frac{1}{(x+1)}$$

a ułamek czasu spędzony na walkę o pożywienie wynosi:

$$F(x) = B(x+1)^2$$

gdzie A i B to stałe. Wyznacz rozmiar grupy, dla którego czas zmarnowany jest na obserwację i walkę jest najmniejszy.