Lista zadań #4
Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 4.1

Wzrost ludzkiej populacji

Mówi się, że ludzka populacja wzrasta wykładniczo. Oznacza to, że

$$P(t) = Ce^{rt}$$

gdzie r > 0.

Uznajmy, że ludzka populacja na początku 1800 roku jest punktem odniesienia (t=0). Dane w latach następnych pokazane są w Tabeli.

year	**human population** (billions)
1	0.2
1000	0.275
1500	0.45
1650	0.5
1750	0.7
1804	1
1850	1.2
1900	1.6
1927	2
1950	2.55
1960	3
1980	4.5
1987	5
1999	6
2011	7
2020	7.7

Pokaż, że dane reprezentowane są przez funkcję

$$P(t) = Ce^{r(t-1800)}$$

gdzie t to czas w latach i r > 0?

a) Pokaż, że ta zależność skutkuje tym, że ln(P) jest funkcją liniową czasu i że r to nachylenie tej liniowej zależności.
b) Wykorzystaj dane z tabeli od roku 1800 di roku 2020 aby zbadać, czy P(t) wpisuje się w funkcję wykładniczą. Zastosuj regresję liniową.
c) Jaki są jednostki r?
d) Jaka jest najlepsza wartość C.
e) Na podstawie wykresu ln(P) od t i szacowanych wielkości r i C, wyznacz kiedy przyrost był większy i mniejszy od średniej wartości.

Zadanie 4.2

Równanie Rickera

W trakcie badań nad populacją łososia często wykorzystuje się równanie Rickera, które wiąże wielkość populacji łososia danego roku, x do przewidywanej populacji w roku następnym y. Równanie Rickera ma następująca postać:

$$y = \alpha x e^{-\beta x}$$

gdzie $\alpha,\beta > 0$.

a) Wyznacz wielkość populacji, która będzie dokładnie taka sama w następnej generacji.
b) Wyjaśnij, dlaczego bardzo duża populacja nie może być utrzymana przez dłuższy czas.

Uwaga: populacja nie zmienia się w sposób ciągły, ponieważ rodzice umierają zanim jajka się wyklują.

Zadanie 4.3

Odległość pomiędzy rybami w ławicy.

Życie w grupie ma swoje zalety i wady: ochrona przed drapieżnikami jest jedną z korzyści. Do wad należy konieczność konkurencji o pożywienie. Odległość pomiędzy osobnikami w ławicy jest określona przez wzajemne oddziaływanie sąsiadujących osobników.

Załóżmy, że jeżeli ryby są w odległości $x > 0$ wówczas są przyciągane z "siłą" F_a i odpychane z "siłą" F_r opisywanymi równaniami:

$$F_a = Ae^{-x/a}$$

$$F_r = Re^{-x/r}$$

gdzie A, R, a, r to wartości dodatnie. *Uwaga:* A, R są związane z wielekością siły podczas gdy a, r z zależnością od odległości.

a) Pokaż, że w odległości $x = a$, pierwsza funkcja zmniejszy się do wartości $(1/e)$ wielkości początkowej. ($e \approx 2.7$)
b) Dla jakiej wartości x druga funkcja pomniejszy się do wartości $(1/e)$ wartości początkowej?
c) Powszechnie zakłada się, że $R > A$ i $r < a$. Zinterpretuj, co to oznacza z punktu widzenia sił.
d) Naszkicuj wykres pokazujący obie funkcje.
e) Wyznacz odległość, dla której obie siły dokładnie się zrównoważą.
f) Jeżeli A i R zmienią się tak, że stosunek R/A się zmniejszy to odległość równowagi wzrośnie czy zmaleje?
g) Co się stanie z odległością równowagi, jeżeli a wzrośnie lub r zmaleje.

Zadanie 4.4

Rozkład nasion. Gęstość nasion w odległości od drzewa x spełnia funkcję:

$$D(x) = D_0 e^{-x^2/a^2}$$

gdzie $a > 0$, $D_0 > 0$ maja wartości dodatnie. Owady zjadające nasiona gromadzą się wokół drzew tak, że część zjedzonych nasion opisuje zależność:

$$F(x) = F_0 e^{-x^2/b^2}$$

gdzie $b > 0$.

Uwaga: Te funkcje zwane są rozkładem Gaussa lub rozkładem normalnym. Parametry a, b są związane z szerokością tych krzywych. Liczba nasion, które przetrwają (są wytworzone, ale nie zjedzone przez owady) wynosi:

$$S(x) = D(x)(1 - F(x))$$

Wyznacz odległość x od drzewa, dla której najwięcej nasion przetrwa.

Zadanie 4.5

Znajdź funkcję, która spełnia następujące równania różniczkowe:

(a) $\frac{dy}{dt} = -y$,

(b) $\frac{dc}{dx} = -0.1c$ and $c(0) = 20$,

(c) $\frac{dz}{dt} = 3z$ and $z(0) = 5$.

Zadanie 4.6

Wzrost populacji w krajach rozwiniętych i rozwijających się. W Kanadzie, kobiety mają około 2 dzieci a średnia długość życia to 80 lat. W krajach rozwijających się średnia długość życia wynosi 60 lat a kobiety mają średnio 4 dzieci.

Porównaj przyrost naturalny i śmiertelność per capita i przewidź wzrost lub spadek populacji w każdym z krajów.

Wyznacz szybkość wzrostu populacji w procentach *k* oraz czas potrzebny do podwojenia populacji.

Zadanie 4.7

Wzrost populacji. Populacja zwierząt wzrasta per-capita z szybkością $b = 0.08$ na rok i ma śmiertelność per-capita $m = 0.01$ na rok. Gęstość zaludnienia, $P(t)$ spełnia równanie:

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - mP(t)$$

a) Jeżeli populacja na początku wynosi $P(0) = 1000$, to jaka będzie duża za 5 lat.
b) Kiedy populacja się podwoi ?

Zadanie 4.8

Populacja gryzoni. Przyrost naturalny per capita dla gryzoni wynosi 0,05 na dzień. Oznacza to, że średnio każdy osobnik produkuje 5 potomków w każde 100 dni. Załóżmy, że w przeciągu 1000 dni żaden z osobników nie zdechł a populacja początkowa gryzoni wynosi 250.

a) Napisz równanie dla wielkości populacji $N(t)$ w czasie (w dniach).
b) Napisz warunki początkowe dla N
c) Znajdź rozwiązanie, tzn. znajdź rozwiązanie równania różniczkowego dla danych warunków początkowych.
d) Jak duża jest populacja gryzoni po 1 roku?

Zadanie 4.9

Wzrost i wymieranie mikroorganizmów.

a) Populacja y(t) danego mikroorganizmu wzrost nieustannie w sposób wykładniczy. Czas potrzebny na podwojenie wielkości populacji wynosi 0,27 godziny. Jakie równanie opisuje ten wzrost.
b) Wystawienie na działanie ultrafioletu, populacja przestaje wzrastać i mikroorganizmy giną. Określono, że w takim przypadku połowiczny czas zaniku wynosi 0,1 godziny. Jakie równanie opisuje taka populację?

Zadanie 4.10

Populacja bakterii. Populacja bakterii wzrasta z prędkością proporcjonalna do wielkości populacji w danym czasie t. Załóżmy, że wielkość populacji w czasie t wynosi N(t). W doświadczeniu pokazano, że po 10 min. wielkość populacji wynosi 15 000 a w czasie t = 30 min wynosi 20 000.

a) Jak duża była populacja początkowa?
b) Jak duża będzie populacja w czasie $t = 60$ min?

Zadanie 4.11

Leczenie antybiotykami.

Kolonia bakterii jest potraktowana umiarkowanym antybiotykiem wiec bakterie zaczynają umierać. Zaobserwowano, że gęstość bakterii w funkcji czasu opisana jest przybliżona funkcją

$$b(t) = 85e^{-0.5t}$$

gdzie t oznacza czas.

Wyznacz czas, po którym połowa bakterii zginie. Określ, ile czasu zajmie aby wyginęło 99% bakterii.

Zadanie 4.12

Dwie populacje.

Badane są dwie populacje. Populacja 1 opisywana jest równaniem:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0{,}2y_1$$

a populacja 2 równaniem

$$\frac{dy_2}{dt} = -0{,}3y_2$$

gdzie t to czas

a) Która populacja rośnie, a która się kurczy?

b) Wyznacz czas połowiczny dla każdej z populacji

c) Jeżeli początkowa wielkość populacji była odpowiednio $y_1(0) = 100$ i $y_2(0) = 10{,}000$, jak duża będzie każda z populacji po czasie t ?

d) Po jakim czasie obie populacje będą dokładnie takie same?

Zadanie 4.13

Populacja ludzka.

Populacja ludzi na Ziemi podwaja się co, mniej więcej, 50 lat. W październiku 2000 roku było około 6,1 miliarda ludzi.

a) Określ jak duża będzie populacja ludzka po 500 latach dla scenariusza niekontrolowanego wzrostu.
b) Ile osobników będzie zamieszkiwało 1 km^2 planety dla takiej populacji ? (obwód Ziemi to ok. 40 000 km i załóż, że oceany wyschły).

Zadanie 4.14

Ryby w dwóch jeziorach. W każdym z jezior jest populacja ryb, ale warunki w nich panujące są różne. W pierwszym jeziorze populacja ryb rośnie i opisywana jest równaniem:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}2y$$

gdzie t oznacza czas. W czasie t = 0 było 500 ryb w tym jeziorze. W drugim jeziorze populacja wymiera z powodu zanieczyszczenia. Jej populacja opisywana jest równaniem:

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}1y$$

i jej początkowa wielkość wynosi 4000 ryb.

Po jakim czasie populacje obu ryb będą identyczne?

Zadanie 4.15

Kinetyka chemiczna pierwszego rzędu.

Kiedy chemik mówi, że reakcja chemiczna jest pierwszego rzędu co oznacza, że stężenie substancji w czasie c(t) spełnia równanie:

$$\frac{dc}{dt} = -rc$$

gdzie r to dodatnia wartość stała.

Załóżmy, że początkowe stężenie reagentu jest równe 1M ("1 molarne") i że po 1 godzinie pozostaje połowa tej wartości.

a) znajdź czas połowiczny reakcji
b) wyznacz wartość stałej r
c) określ jak dużo reagent pozostało po 2 godzinach
d) po jakim czasie pozostanie 10% reagent?

Zadanie 4.16

Rozpad chemiczny. W reakcji chemicznej substancja S rozpada się (witamina d w wyniku działania światła). Stężenie tej substancji S spada z prędkością proporcjonalna do jej stężenia. Zaobserwowano, że stężenie 1Mol/Litr zmniejsza się do 0,5 Mol/Litr w przeciągu 10 minut.

a) Po jakim czasie stężenie spadnie do 0,25 Mol/Litr?
b) Po jakim czasie pozostanie 1 % substancji?

Zadanie 4.17

Czas połowiczny. Jeżeli 10% substancji radioaktywnej pozostaje po jednym roku to jaki jest jej czas połowiczny?

Zadanie 4.18

Ciśnienie atmosferyczne. Załóżmy, że ciśnienie atmosferyczne y na wysokości x metrów nad poziomem morza spełnia zależność:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Jeżeli ciśnienie atmosferyczne wynosi 560 i 675 tora na poziomie morza i na wysokości 1000 metrów nad poziomem morza to wyznacz wartość ciśnienia atmosferycznego na poziomie 600 metrów nad poziomem morza.

Zadanie 4.19

Wysokość wody w cylindrycznym pojemniku.

Pojemnik cylindryczny o powierzchni przekroju A ma małą dziurę w dnie o powierzchni a. Można pokazać, że wysokość wody h(t) w cylindrze spełnia równanie.

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

gdzie k to stała zależna o geometrii pojemnika i otwory w dnie.

$$k = \frac{a}{A}\sqrt{2g} > 0$$

g to przyspieszenie ziemskie

Pokaż, że funkcja:

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - k\frac{t}{2}\right)^2$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego dla warunków początkowych $h(0)=h_0$.

Zadanie 4.20

Reakcja chemiczna i rozpad. Reakcja chemiczna w stałej objętości wytwarza substancję w tempie K_{in}. Inna reakcja powoduje rozpad tej substancji w tempie proporcjonalnym do jej stężenia. Niech c(t) oznacza stężenie substancji i niech czas będzie mierzony w godzinach. Wtedy

$$\frac{dc}{dt} = K_{in} - \gamma c$$

Pierwszy wyraz to szybkość powstawania substancji a drugi to szybkość jej rozpadu. Stałe $K_{in} > 0$, $\gamma > 0$ oznaczają szybkość wytwarzania i szybkość rozpadu. *Dla przykładu*, jeżeli stężenie c jest mierzone mM, wtedy *dc*/*dt jest w jednostkach* mM/hr, i wtedy K_{in} jest w mM/h a γ w 1/hr.
Przykład
Napisz rozwiązanie dla równania powyżej jeżeli warunki początkowe to $c(0) = c_0$.
Wyznacz stężenie substancji dla stanu ustalonego.
Rozwiązanie
Zmieniając oznaczenia mamy

$$c(t) \to y(t), \qquad K_{in} \to a,\ \ \gamma \to b$$

Wtedy rozwiązaniem jest funkcja:

$$c(t) = \frac{K_{in}}{\gamma} - \left(\frac{K_{in}}{\gamma} - c_0\right) e^{-\gamma t}$$

Bez względu na warunki początkowe, stężenie substancji będzie dążyć do wartości $c = K_{in}/\gamma$.