

Lista zadań #6

Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 6.1

Dwie molekuly A mogą reagować tworząc nowy związek B. Reakcja jest odwracalna tak, że z B rozpada się na dwie molekuly A. Równanie opisujące tę sytuację jest następujące:

$$\frac{da}{dt} = -\mu a^2 + 2\beta b$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\mu}{2} a^2 - \beta b$$

gdzie $a(t)$ i $b(t) > 0$ to stężenie obu substancji.

- Wyjaśnij, dlaczego pojawia się czynnik 2 w obu równaniach. Pokaż, że całkowita masa $M = a(t) + 2b(t)$ jest stała
- Opisz zachowanie się układu i wyznacz istniejące stany ustalone.

Zadanie 6.2

Biegacze na kołowym torze. Dwaj biegacze zaczynając biec z tego samego miejsca na kołowym torze o długości 400 m. Biegacz Jan potrzebuje 50 sec, a biegacz Michał 43,18 sec na przebiegnięcie 400 m wyścig. Znajdź, szybkość zmiany kąta utworzonego przez promienie wiodące dla biegaczy zakładając, że obaj biegają za stałą prędkością.

Zadanie 6.3

Zegar. Znajdź szybkość zmiany kąta pomiędzy wskazówką minutową i godzinową zegara.

Zadanie 6.4

Załóżmy, że długość wskazówki minutowej wynosi 4 cm a wskazówki godzinowej 3 cm. Z jaką prędkością będą poruszały się względem siebie końce wskazówek o godzinie 3:00?

Zadanie 6.5

Strategia ucieczki rybki Danio

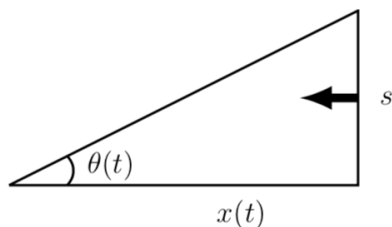


- Opisz geometrię kąta widzenia i określ jak ten kąt się zmienia wraz z odległością od obserwowanego obiektu.
- Określ, jak się zmieni się kąt widzenia ofiary (zebry danio) z jakim widzi drapieżnika o danym rozmiarze zbliżającego się z zadana prędkością?
- Wyjaśnij powiązanie pomiędzy szybkością zmiany kąta widzenia a podjęciem decyzji i ucieczce.
- Wykorzystując uzyskane wyniki wyjaśnij w jakich warunkach ofiara ma (lub nie ma) szansę uciec przed drapieżnikiem.

Zadanie 6.6

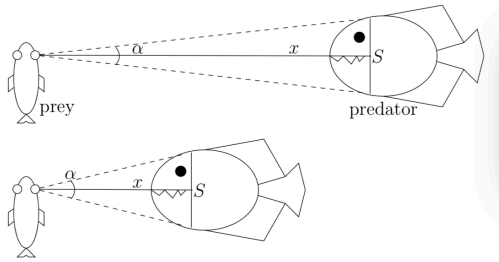
Kąt widzenia

Obiekt o wysokości h porusza się w kierunku obserwatora ze stałą prędkością v . Odległość obiektu od obserwatora wynosi $x(t)$. Określ szybkość zmiany kąta widzenia $\theta(t)$ i jak on zależy od prędkości rozmiaru i odległości obiektu.



Zadanie 6.7

Kąt widzenia jest ważny z punktu widzenia unikania drapieżnika. Problem badany przez Larry Dilla, biologa w Simon Fraser University in Burnaby, BC, Canada. Zebra danio to mała tropikalna ryba, na którą poluje mnóstwo drapieżników. Aby przetrwać musi reagować na niebezpieczeństwo odpowiednio szybko. Jednocześnie nadreagowanie na każdy możliwy ruch nie jest korzystne, z powodu marnowania energii i czasu koniecznego na odżywianie się. Rozważmy hipotezę postawioną przez Dilla i mówiącą, że reakcja oparta jest na obserwacji wizualnej.



Na rysunku pokazano związek pomiędzy kątem widzenia w oku Danio a rozmiarem zbliżającego się drapieżnika znajdującego się w odległości x . Załóżmy, że drapieżnik zbliża się ze stałą prędkością v . Wtedy:

$$\frac{dx}{dt} = -v$$

Wykorzystując geometrię możemy napisać wyrażenie na szybkość zmiany kąta α .

Zadanie 6.8

Stwórz rysunek pokazujący eliptycznego drapieżnika położonego w odległości $x = a$, który zbliża się wzdłuż osi x . Nakreśl kąt widzenia dla drapieżnika z punktu $(0, 0)$. Załóż, że kształt drapieżnika opisuje równanie elipsy $(x - a)^2 + y^2 / s^2 = 1$.

Zadanie 6.9

Naszkić wykres szybkości zmiany kąta widzenia α w funkcji odległości od drapieżnika.

Zadanie 6.10

Na jaki sygnał Danio powinien zareagować, aby skutecznie uniknąć drapieżnika? Powinniśmy rozważyć reakcje, która ma następujące cechy:

- Jeżeli drapieżnik jest zbyt daleko, albo mówi się wolno, (lub się oddala), to jest prawdopodobnie niegroźny i nie powinien wywołać reakcji ucieczki.
- Jeżeli drapieżnik porusza się szybko w kierunku Danio to jest z dużym prawdopodobieństwem niebezpieczny i powinna pojawić się reakcja ucieczki. Odpowiednia hipoteza Dilla jest następująca:
Reakcja ucieczki jest uruchomiona, kiedy drapieżnik zbliża się tak szybko, że szybkość zmiany kąta widzenia jest większa niż krytyczna wartość. Ta krytyczna wartość $K_{crit} > 0$, jest stała i zależy od płochliwości ofiary lub poziomu postrzeganego niebezpieczeństwa. Dlatego ucieczka Danio, następuje, gdy:

$$\frac{d\alpha}{dt} = K_{crit}$$

Zadanie 6.11

Jak daleko znajduje się drapieżnik, kiedy impuls ucieczki jest włączony?

Zadanie 6.12

Lunch. Zinterpretuj odległość reakcji x_{react} . Czy jest możliwe, aby ofiara nie zauważyła drapieżnika odpowiednio wcześnie?

Zadanie 6.13

Punkt poruszający się po okręgu. Punkt porusza się po okręgu o promieniu 1 z prędkością 0.1 radianów/sec.

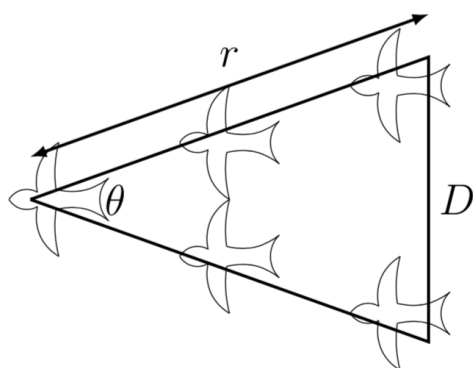
a) Jak szybko zmienia się współrzędna x kiedy $x = 0,5$?

b) Jak szybko zmienia się w tym czasie współrzędna y ?

Zadanie 6.14

Klucz ptaków. Klucz ptaków w kształcie litery "V" to symetryczna struktura, w której odległość pomiędzy liderem i ostatnim ptakiem w V wynosi $r = 10\text{m}$, Odległość pomiędzy ostatnimi ptakami wynosi $D = 6\text{m}$ a kąt tworzony w V wynosi θ (rysunek)

Założmy, że kształt się powoli zmienia; ostatnie ptaki zaczynają się zbliżać tak, że ich odległość zmniejsza się za stałą prędkością $dD/dt = -0.2\text{m/min}$ utrzymując jednocześnie stałą odległość od lidera. Załóż, że struktura jest zawsze w kształcie litery V. Z jaką szybkością zmienia się kąt θ ?



Zadanie 6.15

Balon na ciepłe powietrze. Balon na ciepłe powietrze na ziemi jest w odległości 200 metrów od obserwatora. Balon zaczyna wznosić się z prędkością 50 m/min. Znajdź szybkość zmiany kąta wzniesienia balonu, kiedy balon jest 200 m nad ziemią.

Zadanie 6.16

Kula wystrzelona z armaty z ziemi pod kątem θ do poziomu ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)

przemieszcza się względem ziemi na odległość R (zasięg) opisaną równaniem:

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \sin\theta \cos\theta$$

gdzie $v_0 > 0$, to prędkość początkowa kuli armatniej, która ma wartość stałą a tarcie powietrza jest pominięte. Jaki jest maksymalny możliwy zasięg kuli?

Zadanie 6.17

Oparta drabina. Drabina o długości L jest oparta o ścianę, tak że jej punkt podparcia na ziemi jest oddalony od ściany o x , a jej punkt podparcia na ścianie jest na wysokości y . Drabina ześlizguje się po ścianie ze stałą prędkością C .

- Napisz równanie na zmianę wysokości y .
- Napisz równanie na szybkość zmiany kąta θ , jaki tworzy drabina ze ścianą.

Zadanie 6.18

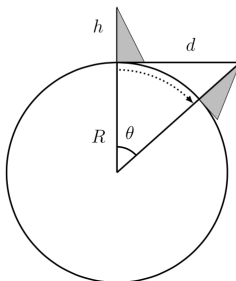
Podchodzenie ofiary

- Pokaż, że powolny drapieznik może podkraść się do ofiary bez bycia zauważonym.
- Jaka jest największa prędkość, z którą drapieznik o rozmiarze S nie będzie zauważony przez ofiarę, która posługuje się kotem widzenia i kiedy szybkość zmiany kąta widzenia jest większa niż prób o wartości K_{crit} ?

Zadanie 6.19

Żłowiec wypływa z portu ze stałą prędkością v . Całkowita wysokość żaglowca z masztem wynosi h (Rysunek).

- W jakiej odległości żaglowiec zniknie za linią horyzontu?
- Jak szybko będzie znikał maszt zaraz przed zniknięciem?



Zadanie 6.20

Najlepszy widok. Pokój posiada okno o wysokości 1.5 m. Dolna krawędź okna jest 10cm powyżej linii oczu obserwatora (Rysunek). Jak daleko od okna powinien stać

obserwator, aby widok był najlepszy?

Uwaga: Najlepszy widok oznacza największy kąt widzenia, tj. Kąt pomiędzy liniami łączącymi oczy z dolną i górną częścią okna.

