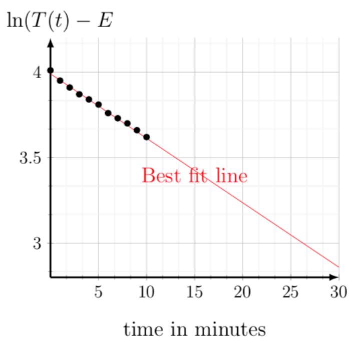
Lista zadań #8
Modelowanie układów biologicznych

Zadanie 8.1

Prawo schładzania Newtona. Prawo to można sformułować w postaci równania różniczkowego, które przewiduje temperaturę obiektu $T(t)$ jeżeli jego temperatura początkowa wynosiła T_0, a temperatura otoczenia wynosiła E. Równanie to ma postać:

$$T(t)=E+(T_0-E)e^{-kt}$$

gdzie t to czas a k to stała. Na rysunku pokazano wykres wartości $\ln(T(t) - E)$ w funkcji czasu. Temperatura otoczenia wynosiła $E = 22^\circ$ C. Na rysunku pokazano także prostą dopasowaną do punktów pomiarowych. Wyznacz wartość stałej k.



Zadanie 8.2

Stężenie alkoholu we krwi (Blood Alcohol Level - BAL). Ilość alkoholu we krwi ($B(t)$) jest mierzone w miligramach alkoholu na 10mL krwi. Pod koniec przyjęcia (t = 0) Jan zmierzył, że $B(0) = 0.08$ (dopuszczalna prawem norma dla kierowcy) później $B(t)$ spełnia równanie:

$$\frac{dB}{dt} = -kB$$

gdzie stałą k oznacza szybkość usuwania alkoholu z krwi przez wątrobę.

- jeżeli Jan poczeka 3 godziny zanim będzie prowadził samochodów jego BAL spadnie do wartości 0.04. Określ wartość stałej k dla Jana (padaj jednostki).

Zgodnie z modelem jak długo trzeba czekać aby wartość BAL spadła do 0.01?

Zadanie 8.3

Populacja z emigracją. Na wyspie zamieszkuje populacja ptaków $P(t)$. Nowe ptaki przybywają nieustannie w stałej liczbie C ptaków na dzień. Każdy ptak może opuścić wyspę z prawdopodobieństwem, γ. W czasie $t = 0$ populacja ptaków wynosiła $P(0) = P_0$

- Napisz równanie opisujące zmianę populacji ptaków na wyspie.

- Wyznacz stan ustalony populacji i zinterpretuj go.

- Podaj rozwiązanie równania dla warunków ustalonych i pokaż, że spełnia następujące warunki:

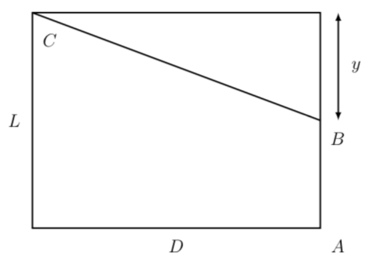
  (i) warunek początkowy,

  (ii) kiedy $t \to \infty$ to funkcja osiąga stan ustalony.

- Jeżeli na wyspie nie ma ptaków w $t = 0$, to ile czasu potrzeba aby populacja ptaków osiągnęła 80% stanu ustalonego?

Zadanie 8.4

Na prostokątnej działce o wymiarach L i D (jak na rysunku) należy zbudować wodociąg, który łączy punkty A i C. Wodociąg można zbudować nad ziemią wzdłuż granicy działki (odcinek AB) a na działce musi być położy pod ziemią (odcinek BC). Koszt jednostki długości wodociągu po ziemią jest 3krotnie wyższy niż nad ziemią. Określ odległość y, dla której koszt wodociągu jest najmniejszy.



Zadanie 8.5

Równanie logistyczne

- Pokaż, że funkcja

$$y(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

spełnia równanie:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)$$

- Jaka jest wartość początkowa y(0)

- Dla jakiej wartości y wzrost populacji jest największy?

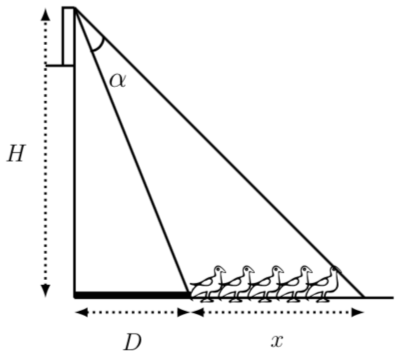
- Co się stanie z y dla dużych wartości t?

- Zakładając, że populacja ludzka wynosi 6 miliardów i że aproksymowany współczynnik wzrostu r = 0,0125 na rok to jak dawno temu populacja ludzi wynosiła jeden milion? Załóż, że współczynnik wzrostu jest stały.

Zadanie 8.6

Student bada zachowanie się stada kaczek na Odrze we Wrocławiu. Rysunek pokazuje ustawienie aparatu fotograficznego. $H = 10$ metrów to wysokość od powierzchni do przesłony aparatu, $D = 2$ metry to szerokość przejścia, a x to odległość położenia aparatu do ostatniej kaczki. Kąt widzenia aparatu wynosi α.

Jeżeli kąt widzenia aparatu rośnie z wartością 1/100 radiana/sec. Z jaką prędkością zmienia się x w momencie gdy $x = 3$ metry?



Zadanie 8.7

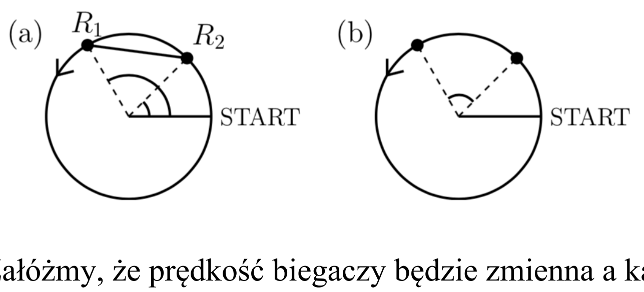
Tor wyścigowy w kształcie koła. Dwóch biegaczy biegnie po okrągłym torze wyścigowym o długości 400 m jak na rysunku. Pierwszy biegacz wykonuje jedno okrążenie w 100 sec., w drugi biegacz w 150 sec. Obaj wystartowali w tym samym czasie. Kąty zakreślone przez biegaczy od momentu startu wynoszą odpowiednio $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$.

- Z jaka prędkością zmienia się kąt $\varphi = \theta_1 - \theta_2$?

- Jaka jest wartość kąta φ po $t = 25$s?

- Jaka jest odległość pomiędzy biegaczami wyrażona w metrach po $t = 25$s?

- Z jaką prędkością zmienia się odległość pomiędzy biegaczami w $t = 25$s ?



Załóżmy, że prędkość biegaczy będzie zmienna a kąt φ spełnia zależność

$$\frac{d\phi}{dt} = A - Bsin(\phi)$$

gdzie $A, B > 0$

- Jaka wartość φ odpowiada stanowi ustalonemu dla tego równania?

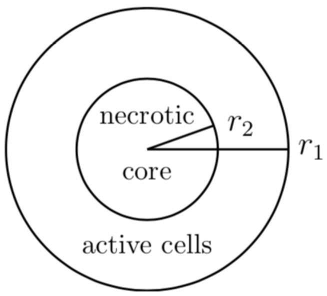
- Jakie ograniczenia należy nałożyć na A i B aby stan ustalony był możliwy?

- Załóżmy, że $A = 1$, $B = 2$. Naszkicuj wykres $f(\varphi) = A - B\sin(\varphi)$ dla $-\pi \le \varphi \le \pi$ I na jego podstawie określ co się stanie, jeżeli biegacze rozpoczęli w tym samym miejscu, ($\varphi = 0$) w chwili $t = 0$.

Zadanie 8.8

Masa guza

Rysunek pokazuje guz nowotworowy zawierający nekrotyczny rdzeń (promień r_2), otoczony dzielącymi się komórkami nowotworowymi. Załóżmy, że zarówno guz jak I jego rdzeń są sferyczne.

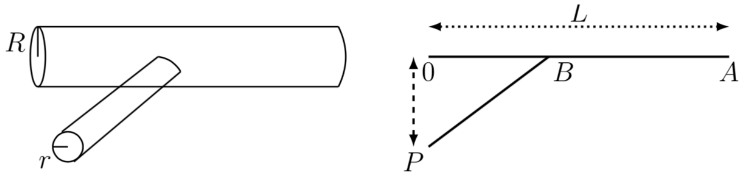


- Jeżeli rdzeń nekrotyczny rośnie w tempie cm^3/rok i objętość komórek aktywnych rośnie w tempie 4 cm^3/rok. W jakim tempie zmienia się zewnętrzny promień guza (r_1) jeżeli $r_1 = 1$ cm.

- W jakim tempie w cm^2/rok zmienia się powierzchnia zewnętrzna guza, kiedy $r_1 = 1$cm?

Zadanie 8.9

Rozgałęzianie się naczyń krwionośnych. Rysunek pokazuje arterię (o promieniu R) z odgałęzieniem (promień r). Odległość $0A$ wynosi L, a odległość pomiędzy 0 i P wynosi d, gdzie $0P$ jest prostopadłe do $0A$. Wyznacz położenie odgałęzienie (punkt B) aby całkowity opór dla krwi jest najmniejszy na drodze ABP. (R, r, d, L są dodatnimi stałymi i $R > r$)



- Odległość pomiędzy 0 i *B* wynosi *x*. Jaka jest długość odcinka *BA* I jaka jest odległość *BP*?
- Opór naczynia krwionośnego jest proporcjonalny do jego długości i odwrotnie proporcjonalny do czwartej potęgi jego promienia. Jaki jest opór, T_1, segmentu *BA* i jaki jest opór, T_2, segmentu *BP*?
- Wyznacz wartość zmiennej x, dla której opór, $T(x) = T_1 + T_2$ jaet najmniejsza.

Zadanie 8.9

Szybkość zmiany czapy lodowej na Ziemi. OD 1950 roku czapa lodowa na biegunie północnym ciągle się kurczy. Czapa lodowa kurczy się latem i rośnie zimą. Średnia minimalna wartość czapy lodowej w km może być przybliżona równaniem:

$$A = \pi r^2$$

W 2005 roku promień czapy był w przybliżeniu 1200 km i kurczyła się z prędkością 8 km/rok (The New York Times, 9/29/05). Jak szybko zmieniała się powierzchnia czapy lodowej w tym roku?

Zadanie 8.10

Powierzchnia gojącej się rany jest opisana równaniem:

$$A = \pi r^2$$

Promień rany maleje w tempie 1 mm/dzień w chwili, gdy promień rany wynosił r = 25 mm. Jak szybko zmieniła się powierzchnia rany?

Zadanie 8.11

Lek został podany doustnie. Z czasem lek jest jednocześnie absorbowany i wydalany. Ilość leku, która przeszła przez organizm w czasie T opisuje funkcja:

$$\int_0^T E(t)dt$$

gdzie E to funkcja opisująca wydalanie leku.

Zazwyczaj szybkość wydalania leku opisuje funkcja:

$$E(t) = te^{-kt}$$

gdzie k > 0 a czas t jest mierzony w godzinach.

a) Wyznacz równanie dla $\int_0^T E(t)dt$
b) Wyznacz wartość$\int_0^{10} E(t)dt$ jeżeli k = 0,2 mg/godzinę

Zadanie 8.12

Średnia dawka leku. Stężenie, C, phenylobitazolu (lek przeciwzapalny) w mikrogramach na mL w surowicy cielaka po zastrzyku opisuje równanie:

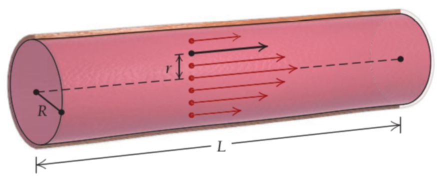
$$C(t) = 43{,}03e^{-0{,}0105t}$$

gdzie t to liczba godzien po wstrzyknięciu i 0 < t < 120.

a) Jeżeli ten model jest dokładny to wyznacz stężenie początkowe,
b) Jakie jest średnie stężenie leku w surowicy krwi w przedziale 10 < t < 120

Zadanie 8.13

Prawo Poiseuillea



Przepływ krwi w naczyniu krwionośnym jest szybszy w jego centrum i powolny w pobliżu ścian. Prędkość przepływu krwi opisuje równanie:

$$V = \frac{p}{rLv}(R^2 - r^2)$$

gdzie R to promień naczynia krwionośnego, r to odległość od środka naczynia i p i v to ciśnienie hydrostatyczne i prędkość krwi oraz L to długość naczynia krwionośnego. Jeżeli R jest stałe, to możemy myśleć o V jako funkcja v. Wtedy całkowity przepływ krwi opisuje równanie:

$$Q = \int_0^R 2\pi V(r) r dr$$

Wyznacz wartość Q.

Zadanie 8.14

Prędkość cząstki opisuje równanie:

$$v(t) = -0{,}5t^2 + 10t$$

gdzie v(t) jest w m/sec.

a) Jak daleko będzie cząstka po pierwszych 10 sec?
b) Jak daleko będzie cząstka po kolejnych 10 sec?

Zadanie 8.15

Rozprzestrzenianie się grypy;

Podczas 18 tygodni od Listopada 2009 do lutego 2019 szybkość wzrostu nowych zachorowań na świńską grypę może być przybliżona funkcją:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -6{,}34t + 141{,}6$$

gdzie I to całkowita liczba osób zarażonych świńską grypą a t to czas mierzony w tygodniach.

a) Oszacuj I(t) i załóż, że I(0) = 1408
b) Ile osób zaraziło się grypą w przeciągu pierwszych 8 tygodni?
c) Ile osób zaraziło się grypą w przeciągu całych 18 tygodni?

Zadanie 8.16

Leczenie radioaktywnym implantem prostaty. Implant jest pozostawiony w pacjencie i nigdy nie jest usuwany. Ilość energii przekazana przez implant do organizmu jest liczona w remach i opisana równaniem:

$$E = \int_0^a P_0 e^{-kt}\, dt$$

gdzie k stała zaniku materiału radioaktywnego, a to liczba lat po implantacji a P0 jest początkową wielkością transmisji energii.

- Załóżmy, że w terapii zastosowano jod-125, który ma czas połowicznego zaniku równy 60,1 dnia.

a) Ile energii, wyrażonej w remach, jest wyemitowanej w czasie pierwszego miesiąca, jeżeli początkowa emisja energii wynosi 10 remów na rok?

b) wyznacz stałą k dla jodu-125

c) Jaka jest całkowita ilość energii, która implant przekaże do organizmu?

d) wylicz powyższe wielkości, jeżeli w terapii zastosowany jest palladium-103 o czasie połowicznego zaniku równym 16,99 dni.

Zadanie 8.17

Załóżmy, że określona dawka leku została wzięta doustnie. W czasie lek wnika do organizmu oraz jest wydalany z moczem. Całkowita ilość leku, który przeszedł przez organizm w czasie T opisuje równanie:

$$\int_0^T E(t)dt$$

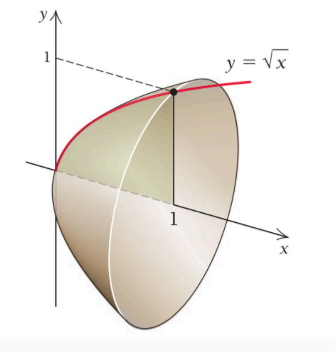
gdzie E(t) jest wydajnością wydalania leku. Typowa wydajność wydala jest funkcją $E(t) = te^{-kt}$ gdzie k > 0 a t to czas w godzinach.

- Wyznacz $\int_0^{\infty} E(t)dt$ i skomentuj wynik.

- Lekarz przypisał dawkę leku równą 100 mg to wyznacz wartość k.

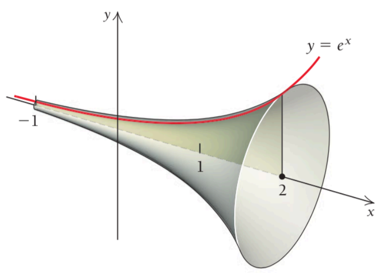
Zadanie 8.18

Wyznacz objętość bryły obrotowej powstała w wyniku obrotu funkcji $y = \sqrt{x}$ wokół osi OX w przedziale od $x = 0$ do $x = 1$.



Zadanie 8.19

Wyznacz objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = e^x$ wokół osi OX w przedziale od $x = -1$ do $x = 2$.



Zadanie 8.20

Uproszczony model dla cyrkulacji CO_2 w atmosferze. Rozważ $C(t)$ jako poziom *CO_2 w atmosferze. Przyjmij szybkość wytwarzania CO_2* wytwarzanym w wyniku spalania paliw kopalnianych jako *E_{FF} , i przyjmij, że szybkość absorbcji CO_2* przez oceany wynosi *S_{OCEAN}. Założymy także, że rośliny absorbują CO_2* w tempie proporcjonalnym do ich masy *i poziomu CO_2.*

Równanie na stężenie atmosferycznego CO_2:

$$\frac{dC}{dt} = E_{FF} - S_{OCEN} - \gamma PC$$

Zakładając, że E_{FF}, S_{OCEAN}, γ, P to stałe, wyznacz poziom ustalony w zależności pod tych parametrów.

Wyznacz $C(t)$, tzn. wyznacz zależność stężenia CO_2 w czasie zakładając, że $C(0)=C_0$.

Jaki będzie efekt wycięcia 15% biomasy roślin przed $t = 0$, na poziom CO_2 w przeciągu 50 lat ?

Zadanie 8.21

Wzrost guza nowotworowego Promień guza nowotworowego wzrasta w tempie, *k. Wyznacz szybkość wzrostu objętości guza kiedy jego promień wynosi $r = 1cm$. Załóż, że guz jest w przybliżeniu sferyczny.*